Démos Khôlle Endomorphismes d'espaces euclidiens

Proposé par : Baptiste Rébillard
Sur la base du cours de 2MIC de M. Noble Pascal

January 4, 2023

Contents

Chapter 1

kholle 18-19-20 (TD 27-28-29)

1.1 Soit E un espace euclidien. Donner la définition d'une isométrie de E et donner des exemples d'isométries de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Définition :

Soit E un espace euclidien $(E, <.,.>)$
$u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie

$$\iff \forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\| \text{ où } \|x\| = \sqrt{<x,x>}$$

Exemple :

rotations	**symétries axiales**
$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$	$S_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$

1.2 Montrer qu'une isométrie préserve le produit scalaire. Montrer que les seules valeurs propres réelles d'une isométrie sont 1 et -1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

$\boxed{\forall (x,y) \in E^2, <u(x), u(y)> = <x,y>}$

Supposons que $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$
Montrons que $\forall (x,y) \in E^2, <u(x), u(y)> = <x,y>$

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2<x,y> + \|y\|^2 \tag{1.1}$$

$$\|u(x)+u(y)\|^2 = \|u(x)\|^2 + 2<u(x),u(y)> + \|u(y)\|^2 \tag{1.2}$$

Par identification, $<u(x), u(y)> = <x,y>$ car $\|x+y\|^2 = \|u(x)+u(y)\|^2$

$\boxed{\text{Les valeurs propres de u sont 1 et -1}}$

Si $\lambda \in Sp(u) \cap \mathbb{R}$, alors $\exists x \in E\backslash\{0\}$, $u(x) = \lambda x$

En passant à la norme : $\underbrace{\|u(x)\|}_{=\|x\|} = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

On en déduit que $(|\lambda - 1|)\underbrace{\|x\|}_{\neq 0} = 0$

D'où ce merveilleux résultat : $|\lambda| = 1 \implies \lambda = \pm 1$

1.3 Donner la définition d'une matrice orthogonale. Donner deux exemples.

$\boxed{\text{Définition :}}$

$S \in M_d(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale $\iff S^\top S = SS^\top = \mathbb{1}_{d_{\mathbb{R}^d}}$
avec $S^{-1} = S^\top$

On note $0_d(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

$\boxed{\text{Exemple 1 :}}$

Matrice de taille $d \times d$ $\left(\begin{array}{c|c} 0 \cdots 0 & 1 \\ \hline & 0 \\ I_{d-1} & \vdots \\ & 0 \end{array}\right)$ Elle devrait nous rappeler quelque chose **tousse**

$\boxed{\text{Exemple 2 :}}$

La matrice identité car multiplié par son inverse elle donne l'identité !

1.4 Expliciter et démontrer le lien entre les matrices orthogonales et les isométries.

$\boxed{\text{Propriété :}}$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$,
Alors u est une isométrie de E
$\iff$ la représentation de u dans toute base othonormée est une matrice orthogonale.

$\boxed{\text{Preuve :}}$
$\boxed{\Rightarrow}$
Soit u une isométrie et $(e_1, ...e_d)$ une base orthonormée. On note S sa représentation matricielle dans cette base.

$$S = \begin{pmatrix} u(e_1) & \dots & u(e_d) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

S orthogonale $\iff$ ses vecteurs forment une base orthonormée.
$< u(e_i); u(e_j) > = < e_i; e_j > = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$

Donc S est une matrice orthogonale.

$\boxed{\Leftarrow}$
Soit u un endomorphisme tel que toute représentation matricielle dans une base orthonormée est une matrice orthogonale. Montrer que u est une isométrie.

Soit $(e_1, ..., e_d)$ une base orthonormée et S la représentation matricielle de u dans cette base.

Soit $x \in E$, alors $x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$

L'objectif est de montrer que $\|u(x)\| = \|x\|$

$\|x\|^2 =< x, x >= \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} x_i x_j < e_i; e_j >= \sum_{i=1}^{d} x_i^2$

Maintenant on calcule $u(x)$.

$u(x) = SX$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$

$$\|u(x)\|^2 =< u(x), u(x) > \quad = (SX)^\top (SX) = X^\top \underbrace{S^\top S}_{=\mathbb{1}_d} X \quad = X^\top X = \sum_{i=1}^{d} x_i^2 \quad = \|x\|^2$$

Chapter 2

kholle 19-20 (TD 28-29)

2.1 Montrer que la matrice de passage entre deux bases orthonormées d'un espace euclidien est une matrice orthogonale.

Soit $\left\{ \begin{array}{l} B = (e_i)_{i \in [|1,n|]} \\ B' = (e'_i)_{i \in [|1,n|]} \end{array} \right.$ 2 bases orthonormales.
Notons P la matrice de passage.
Alors $e'_i = Pe_i$

Calculons,

$$\begin{aligned} < e'_i, e'_j > &= (e'_i)^\top (e'_j) \\ &= (Pe_i)^\top (Pe_j) \\ &=^t e_i \times (P^\top P) \times e_j \\ &= (P^\top P)_{ij} \end{aligned}$$

$$\textbf{et :} < e'_i, e'_j > = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \implies P^\top P = \mathbb{1}_d$$

2.2 Donner la définition d'un endormorphisme symétrique u d'un espace euclidien E. Montrer que si $F \subset E$ est stable par u alors $F^\perp$ est aussi stable par u

$\boxed{\text{Définition :}}$

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que u est symétrique
$\iff \forall (x, y) \in E^2, < u(x), y >=< x, u(y) >$

On note $\mathscr{S}(E) \subset \mathcal{L}(E)$ le SEV de $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes symétriques.

$\boxed{\text{Preuve de la stabilité de } F^\perp \text{ par u :}}$

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$ (ensemble des endomorphismes symétriques) et $F \subset E$ un SEV stable par u de E.
Alors $\forall x \in F$, $u(x) \in F$ donc $u \in \mathscr{L}(F)$.

De plus, $\forall (x,y) \in F^2$, $< u(x), y > = < x, u(y) >$.
Ainsi, $u|_F \subset \mathscr{S}(F)$

Montrons que $F^\perp$ est aussi stable par u.
Soit $x \in F^\perp$. Montrons que $u(x) \in F^\perp$.

Soit $f \in F$,

$$\begin{aligned} < u(x), f > &= < x, u(f) > \text{ car } u \in \mathscr{S}(E) \\ &= 0 \text{ car } \begin{cases} x & \in F^\perp \\ u(f) & \in F \end{cases} \end{aligned}$$

2.3 Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique : montrer que toutes les valeurs propres de A sont réelles.

Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$, soit $\lambda \in Sp(A)$ et X un vecteur propre associé.
Montrons que $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\lambda \in \mathbb{R}$ revient à montrer que :
$Im(\lambda) = 0 \iff \lambda = \bar{\lambda}$ (car la partie imaginaire est nulle donc réel)

$$\begin{aligned} AX &= \lambda X \text{ car } \lambda \in Sp(A) \\ \overline{X}^\top AX &= \lambda \overline{X}^\top X \end{aligned}$$

X $= \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{bmatrix}$ et $\overline{X} = \begin{bmatrix} \overline{X_1} \\ \vdots \\ \overline{X_d} \end{bmatrix}$
$\overline{X}^\top X = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} |X_i|^2 \in \mathbb{R}_+^*$ donc on peux "diviser" par $\overline{X}^\top X$

$$\lambda = \frac{\overline{X}^\top AX}{\overline{X}^\top X}$$

$$\begin{aligned} \overline{\lambda} &= \frac{\overline{\overline{X}^\top AX}}{\overline{\overline{X}^\top X}} \\ &= \frac{\overline{\overline{X}^\top AX}}{X^\top \overline{X}} \\ &= \frac{((X^\top A\overline{X})^\top)^\top}{((X^\top \overline{X})^\top)^\top} \\ &= \frac{(\overline{X}^\top AX)^\top}{(\overline{X}^\top X)^\top} \\ &= \left(\frac{\overline{X}^\top AX}{\overline{X}^\top X}\right)^\top \\ &= \lambda^\top \\ \implies \overline{\lambda} &= \lambda \end{aligned}$$

Donc la partie imaginaire de λ est nulle, donc $\lambda \in \mathbb{R}$

2.4 Soit u un endomorphisme symétrique : montrer que ses espaces propres sont orthogonaux. Illustrer ce résultat avec la matrice $U_{i,j} = 1$

$\boxed{\textit{Preuve} :}$

Soit $(\lambda_1, v_1) et (\lambda_2, v_2)$ deux couples valeurs propres, vecteurs propres tel que : $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

On calcule :

$$\begin{aligned} < u(v_1), v_2 > &= \lambda_1 < v_1, v_2 > \\ < v_1, u(v_2) > &= \lambda_2 < v_1, v_2 > \text{ par symétrie} \end{aligned}$$

$\implies \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} < v_1, v_2 >= 0$
$\implies < v_1, v_2 >= 0$
$\implies$ v_1 et v_2 sont orthogonaux
$\implies$ Les espaces propres sont orthogonaux deux à deux.

$\boxed{\textit{Exemple} :}$

Prenons $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, son polynôme caractéristique est : $P_A(x) = x(x-2)$
Donc diagonalisable car les valeurs propres sont de multiplicités simple.

Calcul des espaces propres :

$$\begin{aligned} E_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | x_1 + x_2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ \implies E_0 &= vect((1, -1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ \implies E_2 &= vect((1, 1)) \end{aligned}$$

Or $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ donc les espaces propres dont orthogonaux car ses vecteurs sont orthogonaux.

Chapter 3

kholle 20 (TD 29)

3.1 Donner la définition d'un endormorphisme symétrique u d'un espace euclidien E. Montrer que si $F \subset E$ est stable par u alors $F^\perp$ est aussi stable par u

section 2.2 page 5

3.2 Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique : montrer que toutes les valeurs propres de A sont réelles.

section 2.3 page 6

3.3 Montrer qu'un endomorphisme symétrique (ou matrice symétrique réelle) est diagonalisable dans une base orthonormée.

Preuve du théorème spectral :

On va procéder par récurrence.
Notons (H_d) l'hypothèse de récurrence.

(H_d) : "tout endormorphisme symétrique d'un espace euclidien E de dimension d est diagonalisable dans une base orthonormée."

Initialisation : d=1
ne pose pas de problème

Hérédité : On suppose que (H_k) est vraie $\forall k \leq d$. Montrons que (H_{d+1}) est vraie.

Soit E un espace euclidien de dimension d+1 et $u \in \mathscr{S}(E)$ (un endormorphisme symétrique).
Soit $\lambda \in Sp(u) \in \mathbb{R}$. On considère $F = ker(u - \lambda \mathbb{1})$.
On a $\dim F \geq 1$.

$$E = F \oplus F^\perp$$

F est stable par u et $u|_F$ est un endomorphisme symétrique de F.
On a également $F^\perp$ stable par u et $u|_{F^\perp}$ est un endormorphisme symétrique de $F^\perp$.
Pour F, on choisit une base orthonormée de F.
$u|_F = \lambda \mathbb{1}_\mathbb{F}$

Donc $u|_F$ est déjà sous forme diagonale.
Pour $F^{\perp}$, on applique l'hypothès de récurrence :
$u|_{F^{\perp}}$ admet une base orthonormée de vecteurs propres.

On rassemble les bases de F et $F^{\perp}$ pour obtenir une base orthonormée de E.
Ainsi (H_{d+1}) est vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence, (H_d) est vraie $\forall d \in \mathbb{N}^*$

3.4 Donner le théorème de décomposition de Cholesky et illustrer sur une matrice de taille 2 ou 3.

Décomposition de Cholesky :

Soit $A \in \mathscr{S}_d^{++}(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices symétriques définies positives).
$\exists L$ une matrice triangulaire inférieure et inversible telle que :
$A = L.L^{\top}$.
Cette décomposition est unique si on fixe le signe des éléments diagonaux de L.

Exemple :

Prenons $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ A étant de taille 2x2, alors :

$$A = L^{\top} = \begin{bmatrix} L_{1,1}^2 & L_{1,1}L_{2,1} \\ L_{2,1}L_{1,1} & L_{2,1}^2 + L_{2,2}^2 \end{bmatrix}$$

Ce qui nous donne 4 équations :

$$\begin{cases} 1 & = L_{1,1}^2 \\ 2 & = L_{1,1}L_{2,1} \\ 2 & = L_{1,1}L_{2,1} \\ 7 & = L_{2,1}^2 + L_{2,2}^2 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} L_{1,1} & = 1 \\ L_{2,1} & = 2 \\ L_{2,2} & = \sqrt{3} \end{cases}$$

Ainsi :

$$A = L^{\top}L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$