Démos analyse

Baptiste Rébillard

7 juin 2023

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$

1.1 Soit $a \in \Omega$. f est continue en a $\iff \forall j \in [|1,p|]$, la fonction composante f_j est continue au point a.

Pour faciliter, on va se placer dans : $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$
f continue en a

$$\begin{aligned}
\text{f continue en a} &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, \|x-a\| \leq \eta \implies \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon \\
&\text{Mais nous sommes en dim finie donc il y a équivalence des normes} \\
&\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta, \forall x \in D_f, \|x-a\| \leq \eta \implies \forall i \in [|1,p|], |f_i(x) - f_i(a)| \leq \varepsilon \\
&\iff \forall i \in [|1,p|], f_i \text{ continue en a.}
\end{aligned}$$

1.2 Soit $a \in \Omega$. f est continue en a $\implies \forall j \in [|1,n|]$, la fonction partielle $\tilde{f_{a,j}}$ est continue au point a_j.

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned}
\text{f continue en a} &\implies \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, \|x-a\| \leq \eta \implies \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon \\
&\implies \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, \forall i \in [|1,n|], |x_i - a_i| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \\
&\implies \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \forall i \in [|1,n|], |t - a_i| \leq \eta \implies |f(t) - f(a_i)| \leq \varepsilon \\
&\implies \forall \varepsilon > 0, \forall i \in [|1,n|], \exists \eta_i > 0, \forall t \in \mathbb{R}, |t - a_i| \leq \eta_i \implies \left|\tilde{f_{a,i}}(t) - \tilde{f_{a,i}}(a_i)\right| \leq \varepsilon \\
&\implies \forall i \in [|1,n|], \tilde{f_{a,i}} \text{ est continue en } a_i
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Différentielle

2.1 Unicité et continuité de la différentielle

2.1.1 (Unicité) Si f est différentiable en x, la différentielle de f en x est unique et : $D_f(x)(h) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$

f est différentiable en $x \in \Omega$, $\Longrightarrow$

$$\exists \lambda \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$$
$$\exists \varepsilon : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p \text{ avec } \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Pour "h petit" :

$f(a+h) = f(a) + \lambda(h) + \|h\| \varepsilon(h)$
$\lambda(h) = f(a+h) - f(a) - \|h\| \varepsilon(h)$
$\forall t \in \mathbb{R}^*$,
$\lambda(th) = f(a+th) - f(a) - \|th\| \varepsilon(h)$
donc :

$$\lambda(h) = \frac{f(a+th)-f(a)}{t} - \underbrace{\frac{|t|}{t} \|h\| \varepsilon(h)}_{\underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0} \text{ Par linéarité de la différentielle}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$$

D'où l'unicité. $D_f(x)(h) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$

2.1.2 (Continuité) Si f est différentiable en x alors f est continue en x

Si f est différentiable en $a \in \Omega$,
alors $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

Donc f continue en a.

2.2 Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $x \in \Omega \iff$ f dérivable en x, et l'on a : $\forall h \in \mathbb{R}, D_f(x)(h) = hf'(x), f'(x) = D_f(x)(1) \in \mathbb{R}^p$

En dimension 1 :
f dérivable en a
$\iff \exists l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\forall h \in \mathbb{R}$,
$f(a+h) = f(a) + l \times h + |h|\varepsilon(h)$
Ce qui implique : $l = f'(a)$
Donc f est différentiable en a et :

$$\begin{aligned} D_f(a)(h) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ (linéaire)} \\ h &\longmapsto f'(a) \times h \end{aligned}$$

De plus, $f'(a) = D_f(a)(1)$

2.3 Applications constantes et linéaires

2.3.1 Si $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est constante, alors f est différentiable en tout point de Ω et $D_f(x) = 0$, $\forall x \in \Omega$ (i.e. $D_f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est l'application nulle)

$$\begin{aligned} f : \Omega \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^p \text{ (constante)} \\ x &\longmapsto c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\forall h \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} f(x+h) &= c \\ &= f(x) + \underbrace{\mathcal{O}_2(h)}_{\lambda(h)} + \|h\| \times \underbrace{\mathcal{O}}_{\varepsilon(h)} \end{aligned}$$

Donc f est différentiable et $\forall x \in \Omega$, $D_f = O_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)}$

2.3.2 Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est linéaire, alors f est différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ et $D_f(x) = f$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \text{ (linéaire)}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$,
$f(x+h) = f(x) + \underbrace{f(h)}_{\lambda(h)} + \|h\| \times \underbrace{\mathcal{O}}_{\varepsilon(h)}$
Donc f est différentiable et $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $D_f(x) = f$

2.4 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = \|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$. Alors, f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $D_f(x)(h) = 2\sum_{j=1}^n x_j h_j = 2\langle x, h\rangle$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{aligned}$$

Soit $a \in \mathbb{R}^n$, soit $h \in \mathbb{R}^n$,
On note $a = (a_i)_{i\in[|1,n|]}$ et $h = (h_i)_{i\in[|1,n|]}$

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \langle a+h, a+h\rangle \\ &= \|a\|_2^2 + 2\langle a, h\rangle + \|h\|_2^2 \\ &= f(a) + 2\langle a, h\rangle + \|h\|_2\, \varepsilon(h) \end{aligned}$$

où $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon(h) = \|h\|_2$

Or $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $h \longmapsto 2\langle a, h\rangle$ est linéaire donc f différentiable et $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$,
$D_{\|.\|_2^2}(a)(h) = 2\langle a, h\rangle$

2.5 $\|.\|_2$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \backslash 0$, avec $\forall x \neq 0$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $D_f(\|.\|_2)(x)(h) = \frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|_2}$

$$\begin{aligned} \|x\|_2 : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\|_2 = \sqrt{\|x\|_2^2} \end{aligned}$$

$\|x\|_2^2$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $\|x\|_2$ est différentiable sur $\mathbb{R}_+^* \backslash 0_{\mathbb{R}^n}$.
Soit $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} D_{\|\cdot\|_2}(a)(h) &= D_{\sqrt{\cdot}}(\|a\|_2^2) \underbrace{\left(D_{\|\cdot\|_2^2}(a)(h)\right)}_{\tilde{h}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\|a\|_2^2}} D_{\|\cdot\|_2^2}(a)(h) \\ &= \frac{1}{2\,\|a\|_2} 2\,\langle a, h\rangle \\ &= \frac{\langle a, h\rangle}{\|a\|_2} \end{aligned}$$

2.6 Auxiliaire "universelle"

$u = f \circ \tau$

$$\begin{aligned} \tau : [0,1] &\longrightarrow [a, a+h] \subset \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto a + th \end{aligned}$$

τ est affine donc dérivable, à valeur dans $[a, a+h] \subset \Omega$, et f différentiable sur Ω. Par composition, $u = f \circ \tau$ est dérivable sur $[0,1]$.

et $\forall t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} u'(t) &= D_u(t)(1) \\ &= D_{f\circ\tau}(t)(1) \\ &= D_f\left(\tau(t)\right)\left(D_\tau(t)(1)\right) \\ \Longrightarrow\ u'(t) &= D_f(a+th)(h) \end{aligned}$$

et $u'(0) = D_f(a)(h) = \underset{t\to 0}{lim} \frac{f(a+th)-f(a)}{t} = \underset{t\to 0}{lim} \frac{u(t)-u(0)}{t-0}$

2.7 Inégalité des accroissements finis

Soit $f \in \mathcal{C}^1$ sur Ω tel que, $\forall x \in \Omega$, $\underset{x\in\Omega}{sup} |||D_f(x)||| < +\infty$.

Soit $(a, b) \in \Omega^2$, $[a, b] \subset \Omega$, alors
$\|f(b) - f(a)\|_{\mathbb{R}^p} \leq \left(\underset{x\in\Omega}{sup} |||D_f(x)|||\right) \|b - a\|_{\mathbb{R}^n}$

Preuve Soit $(a,b) \in \Omega^2$ tel que $[a,b] \subset \Omega$.
On note $h = b - a$ de sorte que $[a, a+h] = [a,b]$

$$\begin{aligned} u : [0,1] &\longrightarrow [a,b] \\ t &\longmapsto f(a+th) \end{aligned}$$

$f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ donc $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$ et d'après le théorème fondamentale de l'analyse, $u(1) - u(0) = \displaystyle\int_0^1 u'(t)dt$. Donc :

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\|_{\mathbb{R}^p} &\leq \int_0^1 \|u'(t)\| \, dt \\ &\leq \int_0^1 \|D_f(a+th)(h)\|_{\mathbb{R}^p} \, dt \\ &\leq \int_0^1 |||D_f(a+th)||| \times \|h\|_{\mathbb{R}^p} \, dt \\ &\leq \left(\underset{t\in[0,1]}{sup} |||D_f(a+th)||| \right) \|b - a\| \end{aligned}$$

Chapitre 3

Dérivées partielles

3.1 Si f est différentiable en un point a, alors $\forall j \in [|1,n|]$, f admet une dérivée partielle d'indice j en a, et $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_f(a)(e_j)$. De plus, $\forall h \in \mathbb{R}^n$. $D_f(a)(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$

f différentiable en a,
donc $D_f(a)$ existe,
$\forall h \in \mathbb{R}^n, h = (h_i)_{i\in[|1,n|]} = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$, $(e_i)_{i\in[|i,n|]}$ représentant la base canonique.

$$\begin{aligned} D_f(a)(h) &= D_f(a)\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} h_i D_f(a)(e_i) \end{aligned}$$

$D_f(a)(e_i) = \underset{t\to 0}{lim} \frac{f(a+te_i)-f(a)}{t} = \underset{t\to 0}{lim} \frac{\tilde{f_{a,i}}(a_i+t)-\tilde{f_{a,i}}(a_i)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$
$D_f(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

3.2 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega) \iff f$ admet des dérivées partielles $\mathcal{C}^0(\Omega)$

$\boxed{\rightarrow}$

$\forall i \in [|1,n|]$, $\forall a \in \Omega$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(e_i)$

$\boxed{\leftarrow}$

$$D_f(a)(h) = \sum_{k=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

3.3 Formule de la chaine en jacobienne : $J_{g\circ f}(x) = J_g(f(x))J_f(x)$

$f : \Omega \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable en a.

$J_f(a) = \left[\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}\right]_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}}$

Et on a $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $D_f(a)(h) = J_f(a)h$ (h étant un vecteur colonne)

$$\left.\begin{array}{l} f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega' \subset \mathbb{R}^p \\ g : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^q \end{array}\right\} \text{différentiable}$$

alors $g \circ f$ différentiable et $\forall x \in \Omega$,
$\forall h \in \mathbb{R}^n$, $D_{g\circ f}(x)(h) = D_g(f(x))(D_f(x)(h)) \iff \underbrace{J_{g\circ f}(x)}_{\in M_{q,n}} h = \underbrace{J_g(f(x))}_{\in M_{q,p}} \underbrace{J_f(x)}_{\in M_{p,n}} h$

Finalement, $J_{g\circ f}(x) = J_g(f(x))J_f(x)$

$$J_f(x) = \left.\begin{bmatrix} & \vdots & \\ & \vdots & \\ \cdots & f_{k,j} & \\ & \vdots & \\ & \vdots & \end{bmatrix}\right\} p$$

$$J_g(f(x)) = \underbrace{\begin{bmatrix} & \vdots & & & \\ & \vdots & & & \\ & \vdots & & & \\ \cdots & g_{i,k} & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & & & \\ & \vdots & & & \end{bmatrix}}_{p} \underbrace{\begin{bmatrix} & \vdots & \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ \cdots & F_{i,j} & \\ & \vdots & \\ & \vdots & \end{bmatrix}}_{n} = J_{g\circ f}(x) \in M_{q,n}$$

$\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x)) \times \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$

3.4 Soit f une application bijective de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dans $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$. On note f^{-1} sa réciproque. Si $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et si $f^{-1} \in \mathscr{C}^1(\Omega', \mathbb{R}^n)$. Alors $\forall a \in \Omega$, $J_{f^{-1}} = (J_f(a))^{-1}$

Soit $a \in \Omega$,
$f^{-1} \circ f_k = i_{d_\Omega}$ donc $\forall a \in \Omega$,
$D_{f^{-1}}(f(a)) \circ D_f(a) = D_{i_d}(a)$
donc $J_{f^{-1}}(f(a)) \times J_f(a) = I_n$
Donc $J_f(a)$ est inversible et $J_f(a)^{-1} = J_{f^{-1}}(f(a))$

3.5 Formule de Taylor reste intégrale

$I \subset \mathbb{R}$, $g \in \mathscr{C}^{n+1}(I)$, $\forall (a,b) \in I^2$,
$g(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)dt$
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ soit $h \in \mathbb{R}^n$ tq $[a, a+h] \subset \Omega$

$$\begin{aligned} u : [0,1] &\longrightarrow [a, a+h] \\ t &\longmapsto f(a+th) \end{aligned}$$

cas n=2, $u \in \mathscr{C}^2([0,1])$

$$\begin{aligned} u'(t) &= D_f(a+th)(h) \\ &= \langle \nabla_f(a+th), h\rangle \\ &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+th) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a+th) \end{aligned}$$

$u'(0) = \langle \nabla_f(a), h\rangle$

$$\begin{aligned} u''(t) &= h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a+th) + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a+th) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a+th) \\ &= {}^{\mathrm{t}}h H_f(a+th) h \end{aligned}$$

Finalement, avec $g = u$, pour $n = 1$, $a = 0$ et $b = 1$,

$\underbrace{f(a+h)}_{u(1)} = \underbrace{f(a)}_{u(0)} + \underbrace{\langle \nabla_f(a), h\rangle}_{u'(1)(1-0)} + \int_0^1 (1-t)\, \underbrace{{}^{\mathrm{t}}h H_f(a+th)}_{u''(t)} h dt$

Chapitre 4

Extrema d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

4.1 Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$. Si f admet un extremum au point a et si f est différentiable en a, alors a est un point critique de f.

f différentiable en a $\implies$ $\exists \varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tel que : $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow}$ et tel que : $\forall h \in \mathbb{R}^n$, h "petit",

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \langle \nabla_f(a), h \rangle + \|h\| \, \varepsilon(h) \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \|h\| \, \varepsilon(h) \end{aligned}$$

Supposons que $\nabla_f(a) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$
Supposons que $\nabla_f(a)_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \neq 0$
alors $\forall t \in \mathbb{R}^*$, t "petit", posons $h = (t, 0, \cdots, 0)$
on a alors :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + t\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + |t|\varepsilon(te_i) \\ &= f(a) + t\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \frac{|t|}{t}\varepsilon(te_i)\right) \end{aligned}$$

$\varepsilon(te_i) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\exists \eta > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}^* |t| \leq \eta \implies |\varepsilon(te_i)| \leq \frac{|\lambda|}{2}$
donc $f(a+h) = f(a) + t \underbrace{\left(\lambda + \frac{|t|}{t}\varepsilon(te_i)\right)}_{|.| \leq sign(\lambda)\times c}$

si $t = -\lambda s$, $s > 0$ petit, $f(a+h) = f(a) - \underbrace{\lambda s}_{>0}$
donc f n'admet pas un minimum en a.

4.2 Conditions suffisante d'extremum strict

Cas $n = 2$,
$H_f(a) \in M_2(\mathbb{R})$ est symétrique (Schwarz) donc elle est diagonalisable dans une base orthonormée.

$\exists (v_1, v_2) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\|v_1\|_2 = \|v_2\|_2 = 1$ et $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \text{et } \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, H_f(a)v_1 &= \lambda_1 v_1 \\ H_f(a)v_2 &= \lambda_2 v_2 \end{aligned}$$

$\forall h \in \mathbb{R}^2$, $h = h_1 v_1 + h_2 v_2$,
$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}(\lambda_1 h_1^2 + \lambda_2 h_2^2) + \underbrace{o(\|h\|^2)}_{\text{négligeable si h "petit"}}$
car $H_f(a)h = H_f(a)(h_1 v_1 + h_2 v_2) = \lambda_1 h_1 v_1 + \lambda_2 h_2 v_2$ par linéarité.
${}^t h H_f(a)(h) = (h_1 {}^t v_1 + h_2 {}^t v_2)(\lambda_1 h_1 v_1 + \lambda_2 h_2 v_2) = \lambda_1 h_1^2 + \lambda_2 h_2^2$
(car $< v_1, v_2 >= 0$ et $\|v_1\| = 1$ car B.O.N)

$\boxed{\text{Si } \lambda_1 \geq \lambda_2 > 0}$

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \frac{1}{2}(\lambda_1 h_1^2 + \lambda_2 h_2^2 + o(\|h\|^2) \\ &\geq f(a) + \frac{1}{2}\lambda_2 \|h\|_2^2 + o(\|h\|^2) \\ &\geq f(a) + \|h\|_2^2 \left(\frac{1}{2}\lambda + o(1)\right) \end{aligned}$$

Pour h "petit" $\big(o(1) << \frac{1}{2}\lambda_2\big)$.
$f(a+h) \underset{\text{si } h \neq 0}{>} f(a)$ donc f admet en a un minimum local strict

$\boxed{\text{Si } \lambda_1 \leq \lambda_2 < 0}$

$f(a+h) \leq f(a) - \|h\|_2^2 \left(\frac{\lambda_1}{2} + o(1)\right)$
Donc pour h "petit" non nul,
$f(a+h) < f(a)$
Donc f admet un maximum local strict en a.

$\boxed{\text{Si } \lambda_1 < 0 < \lambda_2}$

$\underline{h = h_1 v_1 + 0 v_2}$
$f(a + h_1 v_1) = f(a) + \frac{1}{2}\lambda_1 h_1^2 + o(\|h\|_2^2) < f(a)$

$\underline{\tilde{h} = h_2 v_2}$
$f(a + h_2 v_2) = f(a) + \frac{1}{2}\lambda_2 h_2^2 + o(\|h\|_2^2) > f(a)$

Donc f n'admet ni un minimum local ni un maximum local en a, on parle de point-selle ou point col.

4.3 Théorème sur le point critique a d'une fonction f

Soit $f \in \mathscr{C}^2$, $a \in \Omega$ un point critique de f.

$H_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x 2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y 2}(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$
On rappelle que $\det(A) = \prod_i \lambda_i$ et $\mathrm{Tr}(A) = \sum_i \lambda_i$
$\det(H_f(a)) = rt - s^2$ et $\mathrm{Tr}(A) = r + t$

1. $rt - s^2 < 0 \implies$ point-selle
2. $$\begin{aligned} rt - s^2 > 0 \text{ et } r \text{ ou } t \text{ est positif} &\implies \lambda_1\lambda_2 > 0 \text{ de plus : } [r > 0 \implies t > 0] \text{ et } [t > 0 \implies r > 0] \\ &\implies \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \\ &\implies \text{minimum locale strict} \end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned} rt - s^2 > 0 \text{ et } r \text{ ou } t \text{ est négatif} &\implies \lambda_1\lambda_2 > 0 \text{ de plus : } [r < 0 \implies t < 0] \text{ et } [t < 0 \implies r < 0] \\ &\implies \lambda_1 < 0 \text{ et } \lambda_2 < 0 \\ &\implies \text{maximum locale strict} \end{aligned}$$
4. $rt - s^2 = 0 \implies$ On ne peux rien conclure

Chapitre 5

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites

5.1 Théorème des fonctions implicite dans le cas n=p=1

Enoncé Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$

Preuve

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto [x, f(x, y)]$$

- $F \in \mathscr{C}^k(\Omega)$(comme f).
- $\forall (x, y) \in \Omega$,
$J_f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}$
$\det J_f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$

Théorème d'inversion locale :
$\exists (A, B) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $\mathscr{U} =]a - A; a + A[$ et $\mathscr{V} =]b - B; b + B[$

$F : \mathscr{U} \times \mathscr{V} \longrightarrow F(\mathscr{U}, \mathscr{V})$ est un $\mathscr{C}^k$ difféomorphisme

$\forall (x, y) \in \mathscr{U} \times \mathscr{V}, \forall (u, v) \in F(\mathscr{U}, \mathscr{V})$,

$$F(x,y)=(u,v)=\left\{\begin{array}{ll} u & =x \\ v & =f(x,y)\end{array}\right.$$
$$=\left\{\begin{array}{ll} x & =u \\ y & =\theta(u,v)\end{array}\right.$$

où

$$\begin{aligned}\theta : F(\mathscr{U},\mathscr{V}) &\to \mathbb{R} \text{ est } \mathscr{C}^k \\ (u,v) &\longmapsto y=\theta(u,v)\end{aligned}$$

$\forall (x,y)\in \mathscr{U}\times\mathscr{V},\ f(x,y)=0 \iff y=\theta(x,0)$
Posons

$$\begin{aligned}\varphi : \mathscr{U} &\longrightarrow \mathscr{V} \\ x &\longmapsto \theta(x,0)\end{aligned}$$

$\forall x\in\mathscr{U},\ f(x,\varphi(x))=0$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))\times 1+\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\times\varphi'(x)=0$
et comme : $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,\varphi(a))\neq 0$.
Par continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ et de φ en a,
$\frac{\partial f}{\partial y}(a,\varphi(a))\neq 0$, quitte à restreindre $\mathscr{U}$, $\forall x\in\mathscr{U},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\neq 0$

D'où : $\varphi'(x)=\dfrac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$

5.2 Coordonnées polaires

Preuve Soient :
$f:\mathscr{V}\to\mathbb{R}$, $g=f\circ\varphi$
$g:\mathscr{U}\to\mathbb{R}'$

$$\begin{aligned}\varphi : \mathscr{U} &\to \mathscr{V} \\ (r,\theta) &\longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)=(x,y)\end{aligned}$$

$\forall (r,\theta)\in\mathscr{U}, J_\varphi(r,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}\frac{\partial r}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial r}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \theta}{\partial y}(x,y)\end{bmatrix}=J_{\varphi^{-1}}(\varphi(r,\theta))=(J_\varphi(r,\theta))^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \frac{-\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r}\end{bmatrix}$

Rappel : $A=\begin{bmatrix}a & b \\ c & d\end{bmatrix}$

1. A est inversible $\iff ad - bc \neq 0$
2. $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(ComA)^\top = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
3. $\forall (x,y) \in \mathscr{V}$ avec $(x,y) = \varphi(r,\theta)$, $(r,\theta) \in \mathscr{U}$
   $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) \iff f(x,y) = g(r(x,y), \theta(x,y))$

$\forall (x,y) \in \mathscr{V}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) \times \frac{\partial \tilde{r}}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta)(r\theta) + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x}(x,y) \\ &= \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\cos\theta + \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \times \frac{-\sin\theta}{r}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) \times \sin\theta + \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \times \frac{\cos\theta}{r}$$

$$\begin{aligned}\nabla_f(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\vec{e_1} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\vec{e_2} \\ &= \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\underbrace{(\cos\theta\vec{e_1} + \sin\theta\vec{e_2})}_{\vec{e_r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\underbrace{(-\sin\theta\vec{e_1} + \cos\theta\vec{e_2})}_{\vec{e_\theta}}\end{aligned}$$

Finalement, on a en coordonnée polaires,
$\nabla_g(r,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) \\ \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \end{bmatrix}_{(\vec{e_r},\vec{e_\theta})}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) =& \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) \times \cos^2\theta + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial r}(r,\theta) \times \frac{-\sin\theta\cos\theta}{r} \\ &+ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) \times \frac{\sin^2\theta}{r} + \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta}(r,\theta) \times \frac{-\sin\theta\cos\theta}{r} \\ &+ \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) \times \frac{\sin^2\theta}{r^2} + \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \times \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2} \\ &+ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \times \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\end{aligned}$$

En coordonnée polaires,
$\Delta_g(r,\theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)$

Chapitre 6

Intégrales généralisées

6.1 Convergence des intégrales de Riemann

Soit $f : x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$ continue sur $]0,1]$,
Soit $\varepsilon > 0$,

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\alpha} \times \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_\varepsilon^1 & \text{si } \alpha \neq 1 \\ [\ln x]_\varepsilon^1 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1\varepsilon^{\alpha-1}} + \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\ln \varepsilon & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha = 1 \\ -\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\underset{\varepsilon \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} -\infty & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1 \\ -\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge $\iff \alpha < 1$
Donc $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$

6.2 Règles de comparaison sur les intégrales de fonctions positives

Enoncé Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a,b[$ telles que $\forall x \in [a,b[$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$. On a alors les résultats suivants :

1. $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ converge $\implies \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge

2. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ diverge $\implies \displaystyle\int_a^b g(x)dx$ diverge

Preuve

1. Supposons $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ converge, alors $\forall x \in [a, b[$,

$$\underbrace{\int_a^x f(t)dt}_{\text{majoré}} \leq \int_a^x g(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

   $\implies$ l'intégrale est convergente.

2. Contraposé du 1.

Chapitre 7

Intégrales à paramètre

7.1 Continuité de l'intégrale à parametre.

$I = [a, b[$, $(a, b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$. Soit $\varepsilon > 0$, soit $x_0 \in [c, d]$,

- $\displaystyle\int_a^b \varphi_0(t)dt$ converge $\implies \exists \eta \in [a, b[$, $\displaystyle\int_\eta^b \varphi_0(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{4}$

- $\forall x \in [c, d]$

$$|g(x) - g(x_0)| = \int_a^\eta |f(t, x) - f(t, x_0)|\, dt + \underbrace{\int_\eta^b |f(t, x) - f(t, x_0)|\, dt}_{\leq 2 \int_\eta^b \varphi_0(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{2}}$$

De plus, f continue sur $\Delta = [a, \eta] \times [c, d]$, d'après le théorème de Heine, f et uniformément continue sur Δ :
$\exists \sigma > 0, \forall (t, x) \in \Delta, \forall (x, y) \in \Delta,$
$\|(t, x) - (s, y)\| \leq \sigma \implies \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(\eta - a)}$

Prenons (t, x) et $(t, x_0) \leq \sigma$
alors $\displaystyle\int_a^\eta |f(t, x) - f(t, x_0)|\, dt \leq \int_a^\eta \frac{\varepsilon}{2(\eta - a)} dt = \frac{\varepsilon}{2}$

Donc $\forall x \in [c, d]$, $|x - x_0| \leq \sigma \implies |g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon$, et donc g est continue en x_0, et donc sur $[c, d]$.

7.2 Dérivabilité de l'intégrale à paramètre

$I : [a, b[$, soit $x_0 \in [c, d]$, soit $\varepsilon > 0$,

1. $\exists \eta \in [a, b[$, $\int_\eta^b \varphi_1(t)dt \leq \varepsilon$.

2.

$$\forall x \in [c,d],$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x} - \int \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt\right| &= \left|\int_I \left(\frac{f(t,x)-f(t,x_0)}{x-x_0} - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\right) dt\right| \\
&\leq \underbrace{\left|\int_a^\eta \frac{f(t,x)-f(t,x_0)}{x-x_0} - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)dt\right|}_{A(x)} \\
&\quad + \underbrace{\left|\int_\eta^b \left(\frac{f(t,x)-f(t,x_0)}{x-x_0} - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\right) dt\right|}_{R(x)} \\
&\leq A(x) + R(x)
\end{aligned}$$

Soit $t \in I$ fixé,
$f(t,\cdot)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[c,d]$ D'après le théorème des accroissements finis,
$\exists X(t) \in]x_0, x[$ (ou $]x, x_0[$), $\frac{f(t,x)-f(t,x_0)}{x-x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t)$

1. $A(x) \leq \int_a^\eta \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\right| dt$
   $\frac{\partial f}{\partial x}$ est uniformément continue sur $[a,\eta] \times [c,d]$
   donc

   $$\begin{aligned}
   |x-x_0| \leq \sigma &\implies |X(t)-x_0| \leq \sigma \\
   &\implies \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2(\eta-a)}
   \end{aligned}$$

   $\implies A(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$
2. $R(x) \leq \displaystyle\int_\eta^b \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t))\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\right|\right) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$
   Ainsi, $\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)dt\right| \leq \varepsilon$
   Donc g est dérivable et $\forall x_0 \in [c,d], g'(x_0) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)dt$
3. $\left.\begin{array}{l} \left|\frac{\partial f}{\partial x}((t,x)\right| \leq \varphi_1(t) \\ \frac{\partial f}{\partial x} \text{ continue sur } I \times [c,d] \end{array}\right\} \implies g' \text{ est continue } \implies g \in \mathscr{C}^1$