

$\forall n \in \mathbb{N}, (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x, y) \in E^{n+2}$

Propriété de Markov
 $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x)$

Homogénéité
 $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x)$ ne dépend pas de n
 $\implies (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de markov (homogène)

1. P est la matrice de transition
2. $P = (P(x, y))_{x, y \in E}$ est carré de taille $Card(E)$
3. $P(x, y) \in [0, 1]$
4. $\sum_{y \in E} P(x, y) = 1, x \in E$

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites de v.a. à valeur dans E et $F, f : E \times F \rightarrow E$
 $X_{n+1} = f(X_n, Y_{n+1})$ est une chaîne de Markov

μ la loi initiale de la chaîne. $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2$ et $x_0, \dots, x_{n+k} \in E$,

1. $\mathbb{P}(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \mu(0) \prod_{i=0}^{n-1} P(x_i, x_{i+1})$
2. $\mathbb{P}(X_{n+k} = x_{n+k}, \dots, X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \prod_{i=n+1}^{n+k} P(x_{i-1}, x_i)$

$$P^n(x, y) = \sum_{z \in E} P(x, z) P^{n-1}(z, y) = \sum_{z \in E} P^{n-1}(x, z) P(z, y)$$

$\implies \begin{cases} P^0(x, y) = \mathbb{1}_{\{x=y\}} \text{ par convention} \\ P^n \text{ est stochastique} \iff \sum_{y \in E} P^n(x, y) = 1, x \in E \end{cases}$

$$\mathbb{P}(X_n = y \mid X_0 = x) = P^n(x, y), x, y \in E$$

$$\mu P(y) = \sum_{x \in E} \mu(x) P(x, y), y \in E$$

On note P_x et \mathbb{E}_x la probabilité et l'espérance sachant $X_0 = x$

$X_0 \rightsquigarrow \mu \implies \forall n \in \mathbb{N}, X_n \rightsquigarrow \mu P^n$
 Si $Card(E)$ fini, il suffit de diagonaliser !

$\exists n \in \mathbb{N}, P^n(x, y) > 0 \implies x$ mène à y ($x \rightsquigarrow y$)
 (i.e. on peut atteindre y en n étapes à partir de x)
 $\iff \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x_1, \dots, x_{n-1} \in E, P(x, x_1)P(x_1, x_2) \dots P(x_{n-1}, y) > 0$

$$\forall x, y \in E, x \rightsquigarrow y \iff [x \rightsquigarrow y \text{ et } y \rightsquigarrow x]$$

- C est une classe de communication
1. C fermée si $[\forall x \in C, x \rightsquigarrow y \implies y \in C]$
 2. C ouverte si pas fermée (i.e. $\exists x \in C$ et $y \notin C, x \rightsquigarrow y$)
 3. Un état x est absorbant si $\{x\}$ fermée (i.e. $P(x, x) = 1$)
 4. La chaîne est irréductible si tout communique (1 seule classe de communication)

Nombre de visite de y :

$$V_y = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{X_n=y\}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{y\}}(X_n)$$

Temps de retour en y :

$$T_y = \inf\{n \geq 1, X_n = y\}$$

$\inf \emptyset = +\infty$ par convention
 On parle de temps, n commence à 1 ($T_y = \inf\{n \geq 0, X_n = y\}$ dès que $X_0 \neq y$)

- $y \in E$ est dit :
1. récurrent si $\mathbb{P}(V_y = \infty) = 1$
 2. transitoire si $\mathbb{P}(V_y = \infty) = 0$

$n \in \mathbb{N}^*, y \in E$, temps du n-ième retour en y :

$$T_y^{(n)} = \inf\{k \geq T_y^{(n-1)} + 1, X_k = y\}$$

avec $T_y^{(0)} = 0$ et $T_y^{(1)} = T_y$

$$\mathbb{P}(T_y^{(n)} - T_y^{(n-1)} \mid T_y^{(n-1)} < \infty) = \mathbb{P}(T_y \mid X_0 = y)$$

$y \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_y(V_y > n) = p_y^n$

$p_y = 1 \implies \mathbb{P}_y(V_y = \infty) = 1$ (y est un état récurrent)
 $p_y < 1 \implies \mathbb{P}_y(V_y \mid X_0 = y)$ est une loi géométrique de paramètre $1 - p_y$ ($p_y = 0 \implies \mathbb{P}_y(V_y = 1) = 1$)

- $y \in E$, on a la dichotomie suivante :
1. $\mathbb{P}_y(T_y < \infty) = 1 \iff y$ récurrent $\iff \sum_{n \in \mathbb{N}} P^n(y, y) = \infty$
 2. $\mathbb{P}_y(T_y < \infty) < 1 \iff y$ transitoire $\iff \sum_{n \in \mathbb{N}} P^n(y, y) < \infty$

$$\mathbb{P}(X = \infty) = 1 \implies \begin{cases} P_y(T_y < \infty) = 1 \iff p_y = 1 \\ P_y(T_y < \infty) < 1 \iff p_y < 1 \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} P^n(y, y) = \frac{1}{1 - p_y} \end{cases}$$

- C une classe de communication :
1. C est récurrente \implies C fermée
 2. C ouverte \implies C transitoire
 3. C fermée + finie \implies C récurrente
 4. l'espace d'état de E est fini \implies [C récurrente \iff C fermée]

Tous les éléments d'une même classe sont de même nature, tous récurrents ou tous transitoires.

π une mesure sur E (de masse éventuellement ∞).

$$\pi(y) = \pi P(y), y \in E \implies \pi \text{ est une mesure invariante}$$

avec $\pi P(y) = \sum_{x \in E} \pi(x) P(x, y), y \in E$

π une proba \implies on parle de proba
 π mesure invariante $\implies \pi = \pi P^n \implies \forall n \in \mathbb{N}, X_n \rightsquigarrow \pi$

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ irréductible } $\implies \pi(y) > 0, \forall y \in E$
 π mesure invariante pas identiquement nulle

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ irréductible (classe E unique) } $\implies \exists$ mesure invariante non nulle qui est unique à une constante multiplicative près
 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ récurrente

Dans la suite, on va considérer $V_y^x = \sum_{n=0}^{T_x-1} \mathbb{1}_{\{X_n=y\}}$
 On remarque que $\mathbb{E}_x(V_x^x) = \mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$

On note $\gamma_x(y) = \mathbb{E}_x(V_y^x)$ la mesure sur E

On remarque que cette valeur peut être ∞ et $\gamma_x(x) = 1$

une chaîne est **irréductible + récurrente**

$\implies \forall x \in E, \gamma_x$ est une mesure invariante tq. $0 < \gamma_x(y) < \infty, \forall y \in E$

$$T_x = \sum_{n=0}^{T_x-1} 1 = \sum_{n=0}^{T_x-1} \sum_{y \in E} \mathbb{1}_{\{X_n=y\}} = \sum_{y \in E} V_y^x$$

$$\mathbb{E}_x [T_x] < \infty \iff \sum_{y \in E} \mathbb{E}_x [V_y^x] = \sum_{y \in E} \gamma_x(y) < \infty$$

Un état récurrent x est dit :

- récurrent positif** si $\mathbb{E}_x[T_x]$ est finie
- récurrent nul** sinon

Si tous les états sont récurrents positifs (resp. récurrents nuls), on dit que la chaîne est récurrente positive (resp. récurrente nulle).

Dans le cas transitoire, on a $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) < 1 \implies \mathbb{E}_x[T_x] = \infty$

x **récurrent positif**, on définit alors π_x sur E par :

$$\pi_x(y) = \frac{\mathbb{E}_x[V_y^x]}{\mathbb{E}_x[T_x]} = \frac{\gamma_x(y)}{\sum_{y \in E} \gamma_x(y)}, y \in E$$

Chaîne **irréductible + récurrente**

tout état de E est récurrent positif

$\iff \exists$ un état récurrent positif

$\iff \exists!$ proba invariante π

Dans ce cas on a $\pi = \pi_x, \forall x \in E$,

$$\pi(y) = \pi_y(y) = \frac{1}{\mathbb{E}_y[T_y]}, y \in E$$

Chaîne **irréductible + récurrente**

tout état de E est récurrent nul

$\iff \exists$ un état récurrent nul

$\iff \exists$ une mesure invariante λ pour la chaîne, de masse infinie, unique à constante multiplicative près

On appelle **période de l'état x** le nombre :

$$d_x = \text{pgcd}\{n \in \mathbb{N}^*, P^n(x, x) > 0\}$$

L'état x est dit **apériodique** si $d_x = 1$

x et y appartiennent à une classe C \implies x et y sont de même période (période de classe).

chaîne **irréductible + récurrente positive + apériodique** (i.e. seule classe E a pour période d=1).

$\implies P^n(x, y) = \mathbb{P}_x(X_n = y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(y), y \in E$

Notons $V_x^n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k=x\}} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{x\}}(X_k), n \in \mathbb{N}$ chaîne irréductible transitoire \implies la v.a V_x^n est majoré par V_x (fini). L'état x étant transitoire :

$$\frac{V_x^n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = \frac{1}{\mathbb{E}_x[T_x]}$$

càd que la proportion de temps passé en x tend vers 0.

Chaîne **irréductible + récurrente**, \forall mesure invariante λ ,

$$\frac{V_y^n}{V_x^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(y)}{\lambda(x)} = \frac{1}{\gamma_x(y)}, x, y \in E$$

et :

$$\frac{V_x^n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{E}_x[T_x]}, x \in E$$

Théorème ergodique (i.e loi des grands nombres)

Chaîne **irréductible + récurrente positive**. \forall mesure λ et $\forall f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ intégrables par rapport à λ , et tq $g > 0$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)}{\sum_{k=0}^{n-1} g(X_k)} = \frac{\sum_{z \in E} f(z)\lambda(z)}{\sum_{z \in E} g(z)\lambda(z)}$$

Si la chaîne est **récurrente nulle**, $\forall f : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui est λ -intégrable,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = 0$$

$\forall f : E \rightarrow \mathbb{R}$ π -intégrable, ou π désigne l'unique proba invariante, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{x \in E} f(x)\pi(x)$$

En particulier, $\forall y \in E$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{x\}}(X_k) = \pi(y)$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_k k \mathbb{P}(X = k)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \text{ pour } |a| < 1 \text{ (ça vient de : } \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \text{ en passant à la limite)}$$

La chaîne est récurrente si :

- $\bullet \mathbb{P}_y(V_y = \infty) = 1$
- $\bullet \mathbb{P}_y(T_y < \infty) = 1$
- $\bullet \mathbb{P}_y(T_y = \infty) = 0$

Classe fermée + finie \implies classe récurrente

$\exists!$ probabilité invariante \implies la chaîne est récurrente positive

$\pi(k)\mathbb{P}(k, n) = \pi(n)\mathbb{P}(n, k) \forall n = k+1 \implies \pi$ est une mesure réversible
 $\sum_k \pi(k) = 1$

une mesure de probabilité réversible est nécessairement invariante !

Si (la somme de chaque ligne de P) = 1, idem pour les colonnes, la matrice est bistochastique !

$\implies \pi = (c, \dots, c)$ avec $c \in \mathbb{R}$

(stochastique c'est pour juste somme des lignes = 1, toutes les matrices de transitions sont stochastiques)

Pour prouver qu'une chaîne est irréductible, on prouve que les 2 états les plus éloignés (si la chaîne est chaîné, que tous les états se suivent) communiquent (ie $P^n(0, n) > 0$ par exemple si 0 et n loin)

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}, \frac{1}{1-x} = \sum_{k \geq 0} x^k$$